SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Sergio Polidoro

EQUAZIONI DI TIPO MONGE-AMPERE IN DOMINI CONVESSI

9 gennaio 1992

1. Introduzione. I risultati di questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con B. Franchi e con N. Kutev, dell' Accademia delle Scienze Bulgara di Sofia.

Abbiamo studiato il problema dell' esistenza di soluzioni convesse non banali per l' equazione di Monge-Ampère

$$\det\left(D^2u\right) = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{1}$$

in un dominio limitato uniformemente convesso $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Supporremo sempre che, per un fissato $\alpha \in (0,1)$, il secondo membro $f\ (= f(x,z))$ sia di classe $C^1(\Omega \times (-\infty,0)) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times (-\infty,0])$. Richiediamo inoltre che, per ogni fissato $x \in \bar{\Omega}$, f sia una funzione noncrescente in z che soddisfi la seguente condizione:

$$f(x,z) > 0 \text{ per } x \in \bar{\Omega}, z < 0 \text{ e } f(x,0) = 0 \text{ per } x \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

cosí che (1) è verificata dalla soluzione identicamente nulla. Per esempio, la funzione $f(x,u) = (-u)^p$ per $p > 0$ o, più generalmente,

$$f(x,u) = a(x)(-u)^p + b(x)(-u)^q \tag{3}$$

dove a, b sono funzioni differenziabli con continuità su $\bar{\Omega}$, $a, b \geq 0, a+b > 0, p, q = \text{cost.} > 0$, soddisfa (2).

In seguito ad una osservazione che il prof. Mancini ha espresso durante l' esposizione del seminario, abbiamo provato anche un teorema di non esistenza di soluzioni convesse del problema (1) che completa il nostro principale risultato.

Il problema (1) è stato completamente risolto da P.-L. Lions [Lio] nel caso $f(x,u) = \lambda(-u)^n$, $\lambda = \text{cost.} > 0$:

$$\det\left(D^2u\right) = \lambda(-u)^n \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega. \tag{4}$$

In [Lio] si dimostra che esiste un unico autovalore positivo λ_0 tale che il problema (4) ha una soluzione convessa u_0 in $C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. Inoltre, se u è soluzione di (4), deve essere $u = cu_0$ per una certa costante $c > 0$.

Risultati di esistenza per il problema

$$\det\left(D^2u\right) = (-u)^p \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{5}$$

sono stati ottenuti in [KuR] per $p < n$ e in [Ku] per $p > n$ quando Ω è una palla ed u è una funzione radiale (cfr. anche [D]).

Dal nostro principale risultato segue che il problema (5) ha almeno una soluzione non banale per ogni $p > 0$, $p \neq n$, anche quando Ω non è una palla.

Mostreremo anche che il problema perturbato

$$\det\left(D^2u\right) = \lambda(-u)^n + (-u)^p \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{6}$$

ha una soluzione non banale per ogni $\lambda \in (0,\lambda_0)$ se $p \neq n$, dove λ_0 è l' unico autovalore del problema (4), mentre non ammette alcuna soluzione convessa per $\lambda > \lambda_0$.

Essenzialmente, le difficoltà per risolvere il problema (1) sono dovute al fatto che l' ellitticità dell' operatore di Monge-Ampère degenera sulla frontiera e quindi si ha una perdita di regolarità delle soluzioni su $\partial\Omega$. Anche i recenti risultati generali sulla regolarità per le equazioni di Monge-Ampère con secondo membro nonnegativo (cfr. [HZ]) non sono applicabili nella nostra situazione. Al fine di superare queste difficoltà, useremo l' idea di Alexandrov e Bakelman sulle soluzioni generalizzate dell' equazione di Monge-Ampère combinata con la teoria dell' indice di punto fisso (cfr. per es. [Am]) per gli operatori compatti negli spazi di Banach ed alcuni recenti risultati di regolarità trovati da Caffarelli [C1,2] (vedi anche [U2]) per soluzioni di viscosità dell' equazione di Monge-Ampère con secondo membro Hölderiano.

Ricordiamo che nella nota di Bakelman [Ba2], utilizzando teoremi sull' indice di punto fisso, vengono provati risultati di esistenza per le soluzioni generalizzate per equazioni di tipo (1) con un termine semilineare dipendente anche da Du.

Questo lavoro è organizzato nel seguente modo: il Capitolo 2 contiene l' enunciato dei principali risultati, nel Capitolo 3 vengono date le corrispondenti dimostrazioni.

2. Enunciato dei principali risultati. Il seguente teorema contiene il principale risultato di questo lavoro.

Teorema 1. *Supponiamo che Ω sia un dominio di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, limitato ed uniformemente convesso con frontiera di classe $C^{1,1}$ e, per un dato $\alpha \in (0,1)$, $f\, (= f(x,z)) \in C^1(\Omega \times (-\infty, 0)) \cap C^{0,\alpha}(\bar\Omega \times (-\infty, 0])$ sia una funzione noncrescente in z per ogni $x \in \bar\Omega$ che soddisfi la condizione (2).*

Se vale una delle due condizioni seguenti:

$$\limsup_{|z|\to\infty} f(x,z)/|z|^n < \lambda_0, \quad \liminf_{|z|\to 0} f(x,z)/|z|^n > \lambda_0 \tag{7.a}$$

o

$$\liminf_{|z|\to\infty} f(x,z)/|z|^n > \lambda_0, \quad \limsup_{|z|\to 0} f(x,z)/|z|^n < \lambda_0 \tag{7.b}$$

uniformemente in $x \in \bar\Omega$, dove λ_0 è l' unico autovalore del problema (4), allora (1) ha almeno una soluzione convessa non banale $u \in C^{0,1}(\bar\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Inoltre, se $f \in C^\infty(\Omega \times (-\infty, 0])$ allora $u \in C^{0,1}(\bar\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 1. Il Teorema 1 non garantisce l' unicità della soluzione non banale. D' altra parte, solo nel caso dell' equazione (5) è stato provato in [Lio] un risultato di unicità per $p = n$, mentre in [Ku] l' unicità della soluzione non banale è stata provata solamente per $p < n$. Per $p > n$, il problema è ancora aperto.

Notiamo che, in generale, non è possibile lasciare cadere le ipotesi (7.a) e (7.b); infatti se la funzione $z \to f(x,z)/|z|^n$ non taglia la quota λ_0, allora il Problema (1) può non avere soluzione. Più precisamente vale il seguente risultato di non esistenza:

Teorema 2. *Supponiamo che Ω ed f verifichino le ipotesi qualitative del Teorema 1.*

Se esiste $\mu > 0$ tale che vale una delle due condizioni seguenti:

$$f(x,z)/|z|^n \leq \mu < \lambda_0, \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } z < 0 \tag{8.a}$$

o

(8.b) $$f(x,z)/|z|^n \geq \mu > \lambda_0, \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } z < 0$$

allora il Problema (1) non ha alcuna soluzione convessa non banale (in $C^0(\bar{\Omega})$).
Inoltre, se $f \in C^\infty(\Omega \times (-\infty, 0])$ allora $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

La prova dei seguenti risultati per le equazioni (3) e (6) è una diretta conseguenza dei Teoremi 1 e 2.

Corollario 3. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato uniformemente convesso di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, con frontiera di classe $C^{1,1}$. Allora il problema*

$$\det\left(D^2u\right) = a(x)(-u)^p + b(x)(-u)^q \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

dove $a, b \in C^1(\bar{\Omega})$, $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ in $\bar{\Omega}$ e $p, q \in (0, n)$ oppure $p, q \in (n, \infty)$, ha almeno una soluzione convessa non banale $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$, dove $\alpha < min\{p, q, 1\}$.
Inoltre, se $a, b \in C^\infty(\Omega)$ allora $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

Corollario 4. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato uniformemente convesso di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, con frontiera di classe $C^{1,1}$. Allora il problema*

(6) $$\det\left(D^2u\right) = \lambda(-u)^n + (-u)^p \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

ammette una soluzione convessa non banale $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0)$ se $p \neq n$, dove λ_0 è l' unico autovalore dell operatore di Monge-Ampère (4) ([Lio]).

Le ipotesi del Corollario 3 richiedono che gli esponenti p, q siano entrambi minori di n o maggiori di n; se invece $0 < p < n < q$, allora (7.a) e (7.b) non sono verificate ed il Teorema 1 non si può più applicare. Tuttavia vale il seguente teorema di perturbazione.

Teorema 5. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato uniformemente convesso di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, con frontiera di classe $C^{1,1}$. Allora il problema*

$$\det\left(D^2u\right) = a(-u)^p + b(-u)^q \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

dove $a, b = cost. > 0$ e $0 < p < n < q$, ammette almeno una soluzione non banale convessa $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ se $a \in (0, a^*)$ o $b \in (0, b^*)$, dove a^*, b^* sono costanti suffucientemente piccole.

OSSERVAZIONE 2. Il Teorema 5 può essere esteso ad equazioni più generali, con secondo membro dipendente anche da x.

Il precedente teorema può essere dimostrato (vedi Capitolo 3), con un metodo basato sulle omotopie utilizzando il seguente risultato.

Teorema 6. *Supponiamo che Ω sia un dominio di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, limitato ed uniformemente convesso con frontiera di classe $C^{1,1}$ e, per un dato $\alpha \in (0,1)$, $f\,(= f(x,z)) \in C^1(\Omega \times (-\infty,0)) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times (-\infty,0])$ sia una funzione noncrescente in z per ogni $x \in \bar{\Omega}$ che soddisfi la condizione (2).*

Allora per ogni $r > 0$ esiste $\mu > 0$ tale che il problema

$$\det\left(D^2u\right) = \mu f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \tag{9}$$

ammette almeno una soluzione convessa non banale $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$, con norma $\|u\| = r$.

Inoltre, se $f \in C^\infty(\Omega \times (-\infty,0])$ allora $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

3. Prova dei principali risultati.

Dimostrazione del Teorema 1. Sia E lo spazio di Banach delle funzioni continue su $\bar{\Omega}$ nulle al bordo $\partial\Omega$: $E = \{v \in C(\bar{\Omega}); v = 0 \text{ su } \partial\Omega\}$ dotato della norma usuale di $C(\bar{\Omega})$ e sia $P \subset E$ il cono positivo delle funzioni convesse. Per ogni $v \in P$ definiamo l' operatore $v \to Tv$ che associa a v l' unica soluzione convessa generalizzata u del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \det\left(D^2u\right) = f(x,v) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

La soluzione generalizzata di (10) è continua su $\bar{\Omega}$ (cfr. [Al],[Ba2], [C1,2]) e quindi $Tv \in P$. Inoltre, se $v \not\equiv 0$, allora dalla convessità di v segue che $v < 0$ in Ω. Di qui, per la regolarità delle soluzioni generalizzate, segue che $Tv \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. La prova di questo risultato è accennata per esempio in [U1] ma per completezza ne diamo una dimostrazione qui di seguito.

Indichiamo con w la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \det\left(D^2w\right) = f(x,-\|v\|) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per la nostra ipotesi di monotonicità si ha, $f(x,-\|v\|) \geq f(x,v(x))$ in Ω, cosí che, per il principio del confronto per soluzioni deboli (vedi per es. [Lij], Teorema 2, o [U2]), risulta $Tv \geq w$ in $\bar{\Omega}$. Sia ora y un punto di $\partial\Omega$; dalla precedente stima segue

$$0 \leq \frac{Tv(y) - Tv(x)}{|x-y|} \leq \frac{w(y) - w(x)}{|x-y|}.$$

Ma la derivata normale su $\partial\Omega$ esiste per la convessità di Tv; quindi

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial\nu}\left(Tv\right)(y) \leq \frac{\partial}{\partial\nu} w(y),$$

per ogni $y \in \partial\Omega$. Perciò, ricordando che le derivate tangenziali sono identicamente nulle sulla frontiera, si ha:

$$\|D(Tv); \partial\Omega\| \leq \|Dw, \partial\Omega\| = c(\|v\|) < \infty$$

e, ancora a causa della convessità,

$$\|Tv; C^{0,1}(\Omega)\| \leq \|D(Tv); \partial\Omega\| \leq c(\|v\|) < \infty.$$

Quindi T è un operatore positivo compatto da P in P.

Per provare l' esistenza di una soluzione generalizzata del problema (1), mostreremo che l' operatore T ha un punto fisso non nullo in P. A questo fine faremo uso dell' indice di punto fisso (vedi ad es. [Am], cap. 11).

Siano $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, dove Ω_1,Ω_2 sono domini uniformemente convessi con frontiera di classe $C^{1,1}$ sufficientmente prossimi ad Ω e siano $u_i \in C^{0,1}(\bar{\Omega}_i) \cap C^\infty(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, le soluzioni convesse, di norma unitaria, del problema agli autovalori

$$\begin{cases} \det\left(D^2 u_i\right) = \lambda_i(-u_i)^n & \text{in } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{su } \partial\Omega_i, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

corrispondenti agli autovalori $\lambda_2 < \lambda_0 < \lambda_1$. Quando Ω_1,Ω_2 sono sufficientmente prossimi ad Ω, allora anche λ_1,λ_2 sono vicini a λ_0. Poichè senza perdita di generalità possiamo supporre che $0 \in \Omega$, la precedente affermazione segue dal risultato in [Lio] attraverso un semplice cambiamento di variabili $x = \mu y$, dove μ è una constante prossima ad 1. Pertanto, senza perdere generalità, possiamo supporre di aver scelto Ω_1, Ω_2 in modo che valgano le seguenti disuguaglianze:

(7.a′) $$\limsup_{|z|\to\infty} f(x,z)/|z|^n < \lambda_2, \quad \liminf_{|z|\to 0} f(x,z)/|z|^n > \lambda_1$$

o

(7.b′) $$\liminf_{|z|\to\infty} f(x,z)/|z|^n > \lambda_1, \quad \limsup_{|z|\to 0} f(x,z)/|z|^n < \lambda_2$$

uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$.

Supponiamo che valga (7.a′) e fissiamo due costanti σ, ρ, $0 < \sigma < \rho$; indicheremo con $X = \{u \in P; u \leq \sigma u_1 \text{ in } \Omega_1,\ \rho u_2 \leq u \text{ in } \Omega\}$. Se σ è piccolo e ρ è grande, allora $X \neq \emptyset$ e X è un sottoinsieme chiuso e convesso di E.

(i) $X \neq \emptyset$:per definizione, esiste $\psi \in P$, ψ strettamente convessa, tale che $\psi \equiv 0$ su $\partial\Omega$, $\psi < 0$ in Ω. allora esiste $\rho > 0$ tale che

$$\max_{\bar{\Omega}} |\psi| < \rho \min_{\bar{\Omega}} |u_2|;$$

d' altra parte, esiste $\sigma > 0$ tale che in $\bar{\Omega}_1$

$$\sigma \max_{\bar{\Omega}_1} |u_1| < \min_{\bar{\Omega}_1} |\psi|$$

e quindi ψ appartiene a X.

(ii) ovviamente X è chiuso, dal momento che P è chiuso. Analogamente, se $u, v \in X$ e $\lambda, \mu \in [0,1]$, $\lambda + \mu = 1$, allora $\lambda u + \mu v \in P$ e, per esempio, $\lambda u + \mu v \geq \lambda\rho u_2 + \mu\rho u_2$ in Ω. Perciò X è convesso.

Allora, pe il Teorema di Dugundji (cfr. ad es. [Am] cap. 11), X è un retratto di E.

Poniamo ora $U = \{u \in P; u < \sigma u_1 \text{ in } \Omega_1, \rho u_2 < u \text{ in } \Omega\}$. Risulta $U \subset X$; inoltre, rispetto alla topologia di X, U è aperto. Infatti, sia u appartenente ad U. Osserviamo che $u < \sigma u_1$ su $\partial\Omega_1$ e u non si annulla mai in Ω. Quindi $\varepsilon_1 = \min_{\bar\Omega_1}\{\sigma u_1 - u\} > 0$. Un analogo procedimento prova che $\varepsilon_2 = \min_{\bar\Omega}\{u - \rho u_2\} > 0$. Allora, se $v \in X$ e $\|u - v\| < \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, risulta $v \in U$, e l' affermazione è provata.

Proveremo ora che, se scegliamo opportunamente ρ e σ, T è un operatore compatto da X ad X. Ovviamente, basta provare che, se $u \in X$, allora

$$Tu \geq \rho u_2 \text{ in } \Omega, \qquad Tu \leq \sigma u_1 \text{ in } \Omega_1. \tag{11}$$

Per ipotesi, se $z < z_0$, si ha $f(x,z)/|z|^n < \lambda_2$; d' altra parte, se $x \in \bar\Omega$, risulta

$$\rho u_2(x) \leq \rho \max_{\bar\Omega} u_2 < z_0$$

quando ρ è grande, dato che $\max_{\bar\Omega} u_2 < 0$. Allora, se $x \in \Omega$,

$$\det\left(D^2 Tu(x)\right) = f(x, u(x)) \leq f(x, \rho u_2(x)) < \lambda_2(-\rho u_2(x))^n = \det\left(D^2 \rho u_2\right).$$

Poichè sulla frontiera $0 = Tu > \rho u_2$ su $\partial\Omega$, dal principio del confronto per soluzioni generalizzate (vedi per es. Teorema 2 in [Lij] e anche [U2]), segue che

$$Tu \geq \rho u_2 \text{ in } \Omega$$

e la prima parte dell' asserto è provata.

Analogamente, per ipotesi $f(x,z)/|z|^n > \lambda_1$ se $z_0 < z < 0$; d' altra parte, se $x \in \bar\Omega_1$, allora

$$0 > \sigma u_1(x) \geq \sigma \min_{\bar\Omega_1} u_1 > z_0$$

quando σ è piccolo. Allora, se $x \in \Omega_1$

$$\det\left(D^2 Tu(x)\right) = f(x, u(x)) \geq f(x, \sigma u_1(x)) > \lambda_1(-\sigma u_1(x))^n = \det\left(D^2 \sigma u_1\right).$$

Poichè sulla frontiera $0 = \sigma u_1 \geq Tu_1$, risulta infine che

$$Tu \leq \sigma u_1 \text{ in } \Omega_1$$

e (11) è completamente provata.

Senza perdita di generalità, possiamo assumere che T non abbia punti fissi su ∂U, poichè un punto fisso $u \in \partial U$ sarebbe una soluzione debole non banale del nostro problema, dato che $u \leq \sigma u_1 < 0$ in Ω_1.

Possiamo applicare il Teorema 11.1 in [Am] per definire l' indice di punto fisso $i(T, U, X)$ di T su U rispetto ad X. Per il Corollario 11.2 dobbiamo solamente provare che $i(T, U, X) \neq 0$. A questo scopo, consideriamo l' applicazione compatta $g : [0,1] \times \bar U \to X$ definita come segue:

$$g(\tau, u) = \tau Tu + (1 - \tau)\psi$$

dove la funzione $\psi \in U$ è quella che abbiamo definito precedentemente, quando abbiamo mostrato che X è non vuoto. Notiamo che $g(\tau, u) \in X$ poichè Tu e ψ sono in X che a sua volta è un sottoinsieme convesso di E. Se $g(\tau, u) \neq u$ per ogni $\tau \in [0,1)$ e $u \in \partial U$, allora, per l' invarianza omotopica dell' indice di punto fisso, si ha $i(T, U, X) = i(g(1,\cdot), U, X) = i(g(0,\cdot), U, X) = i(\psi, U, X) = 1$ (l' ultima uguaglianza segue dalla normalizzazione dell' indice di punto fisso: vedi [Am], Teorema 11.1). Quindi, l' esistenza di un punto fisso per T in U è dimostrata se $g(\tau, u) \neq u$ per ogni $\tau \in [0,1)$ e $u \in \partial U$. Supponiamo per assurdo che esistano tali τ e u. Allora

$$u = \tau T u + (1-\tau)\psi.$$

D' altra parte, o esiste $x_1 \in \Omega_1$ tale che $u(x_1) = \sigma u_1(x_1)$ oppure esiste $x_2 \in \Omega$ tale che $u(x_2) = \rho u_2(x_2)$, dato che $u \notin U$. Supponiamo, per esempio, che esista un tale x_1. Allora, per (11),

$$\begin{aligned}\tau\sigma u_1(x_1) + (1-\tau)\psi(x_1) &\geq \tau T u(x_1) + (1-\tau)\psi(x_1)\\ &= u(x_1) = \sigma u_1(x_1),\end{aligned}$$

cosí che

$$(1-\tau)\{\psi(x_1) - \sigma u_1(x_1)\} \geq 0.$$

Ma $\psi \in U$, e quindi $\psi(x_1) < \sigma u_1(x_1)$ e questo è in contraddizione con quanto scritto sopra.

Supponiamo ora che esista $x_2 \in \Omega$ tale che $u(x_2) = \rho u_2(x_2)$. Allora, per (11),

$$\begin{aligned}\tau\rho u_2(x_2) + (1-\tau)\psi(x_2) &\geq \tau T u(x_2) + (1-\tau)\psi(x_2)\\ &= u(x_2) = \rho u_2(x_2),\end{aligned}$$

cosí che

$$(1-\tau)\{\psi(x_2) - \rho u_2(x_2)\} \leq 0.$$

Ma $\psi \in U$ e quindi $\psi(x_2) > \rho u_2(x_2)$ e siamo di nuovo in contraddizione. Cosí la tesi è completamente provata.

Supponiamo ora che valga (7.b′) e fissiamo due costanti σ, ρ, $0 < \rho < \sigma$. Chiamiamo $k = k(x)$ la funzione continua e convessa su $\bar{\Omega}$ tale che

(i) $k \equiv 0$ su $\partial\Omega$,
(ii) $k \geq u$ per ogni $u \in P$, $\|u\| = 1$,
(iii) se h soddisfa (i) e (ii), allora $h \geq k$.

Poniamo poi $\eta = \max_{\bar{\Omega}_1} k$ e $\tilde{f}(x, u) = \min\{f(x, u), f(x, \sigma/\eta)\}$. Mostreremo che l' operatore $\tilde{T}$ associato a $\tilde{f}$ ha un punto fisso u tale che $\|u\| \leq \sigma/|\eta|$; quindi u sarà anche un punto fisso per T.

Definiamo

$$\begin{aligned}X &= \{u \in P; u \geq \tilde{T}(\sigma/\eta) - 1 \text{ in } \bar{\Omega}\},\\ U &= \{u \in P; u > \tilde{T}(\sigma/\eta) - 1 \text{ in } \bar{\Omega}\},\\ U_1 &= \{u \in P; u > \rho u_2 \text{ in } \bar{\Omega}\},\\ U_2 &= \{u \in U; u < \sigma u_1 \text{ in } \bar{\Omega}_1\},\end{aligned}$$

Come prima, X è un retratto di E e U, U_1 e U_2 sono sottoinsiemi (relativamente) aperti di X ed $U_i \subset U$ per $i = 1, 2$, se $\rho < 1$. Mostreremo più avanti che $\tilde{T}$ non ha punti fissi su ∂U e ∂U_i, $i = 1, 2$, cosí che gli indici di punto fisso $i(\tilde{T}, U, X)$, $i(\tilde{T}, U_i, X)$ $i = 1, 2$ sono ben definiti.

Proviamo che $\tilde{T}$ ha un punto fisso su $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$. Supponiamo per assurdo il contrario; per l' additività dell' indice di punto fisso ([Am],Teorema 11.1, (ii)), tenendo conto del fatto che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, risulta

$$i(\tilde{T}, U, X) = i(\tilde{T}, U_1, X) + i(\tilde{T}, U_2, X). \tag{12}$$

Per prima cosa, calcoliamo $i(\tilde{T}, U, X)$. Per l' invarianza omotopica dell' indice, se l' applicazione

$$(\tau, u) \to F(\tau, u) = \tau \tilde{T} u, \qquad 0 \le \tau \le 1$$

non ha punti fissi su ∂U, allora $i(\tilde{T}, U, X) = i(0, U, X) = 1$. Infatti, se $u \in \partial U$ verifica $u = \tau \tilde{T} u$, allora esiste $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ tale che $u(\bar{x}) = \tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{x}) - 1$. D' altra parte

$$u(\bar{x}) = \tau \tilde{T} u(\bar{x}) \ge \tilde{T} u(\bar{x}) \ge \tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{x}),$$

a causa del fatto che

$$\det\left(D^2 \tilde{T} u\right) \le \tilde{f}(x, \sigma/\eta) = \det\left(D^2 \tilde{T}(\sigma/\eta)\right) \text{ in } \Omega$$

e che $\tilde{T} u = 0 = \tilde{T}(\sigma/\eta)$ su $\partial\Omega$. Siamo cosí arrivati ad una contraddizione.

La stessa omotopia F garantisce che anche $i(\tilde{T}, U_1, X) = 1$, se $\tau\tilde{T}$ non ha punti fissi su ∂U_1; e questo è vero se si sceglie ρ sufficientmente piccolo. Per dimostrare questa affermazione possiamo ragionare come prima: sia $\tau \in [0, 1]$, $u \in \partial U_1$ tale che $u = \tau \tilde{T} u$; allora esiste $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ tale che $u(\bar{x}) = \rho u_2(\bar{x})$. Inoltre, $u \ge \rho u_2$ in $\bar{\Omega}$, per la definizione di U_1. A causa della seconda ipotesi in (7.b′), se ρ è sufficientmente piccolo, risulta

$$\det\left(D^2 \tilde{T} u\right) - \det\left(D^2 \rho u_2\right) = \tilde{f}(x, u) - \lambda_2 |\rho u_2|^n \le \lambda_2 \left(|u|^n - |\rho u_2|^n\right) \le 0$$

in Ω. Quindi $\tilde{T} u > \rho u_2$ su $\bar{\Omega}$, poichè $\tilde{T} u = 0 > \rho u_2$ su $\partial\Omega$. In particolare, per $x = \bar{x}$ si ha

$$\rho u_2(\bar{x}) = u(\bar{x}) = \tau \tilde{T} u(\bar{x}) > \tau \rho u_2(\bar{x}) \ge \rho u_2(\bar{x})$$

che porta ad un assurdo. Pertanto deve essere $i(\tilde{T}, U_1, X) = 1$.

Dimostriamo ora che anche $i(\tilde{T}, U_2, X) = 1$, (se σ è sufficientemente grande). In questo caso consideriamo l' omotopia

$$(\tau, u) \to G(\tau, u) = \tau \tilde{T} u - (1 - \tau)\tilde{T}(\sigma/\eta).$$

Osserviamo esplicitamente che $\tilde{T}(\sigma/\eta) = T(\sigma/\eta)$ appartiene a U_2, cosí che $i(G(0, u), U_2, X) = 1$. Quindi, se $G(\tau, \cdot)$ non ha punti fissi su ∂U_2, allora anche $i(\tilde{T}, U_2, X) = 1$. Supponiamo per assurdo che esista $u \in \partial U_2$ tale che $u = G(\tau, u)$ per un certo $\tau \in [0, 1]$. Notiamo preliminarmente che $\tilde{T}(\sigma/\eta) - 1 \le u$ in Ω , e $u \le \sigma u_1$ in Ω_1. Inoltre deve valere una (almeno) delle seguenti affermazioni:

(α) esiste $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ tale che $\tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{x}) - 1 = u(\bar{x})$;
(β) esiste $\bar{y} \in \bar{\Omega}_1$ tale che $\sigma u_1(\bar{y}) = u(\bar{y})$.

Se si verifica il caso (α), possiamo procedere nel modo seguente:

$$\tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{x}) - 1 = u(\bar{x}) = \tau\tilde{T}u(\bar{x}) + (1-\tau)\tilde{T}(\sigma/\eta)$$

cosí che

$$-1 = \tau\left(\tilde{T}u(\bar{x}) - \tilde{T}(\sigma/\eta)\right).$$

Ma questo è in contraddizione con il fatto che, per il principio del confronto, si ha $\tilde{T}u(\bar{x}) - \tilde{T}(\sigma/\eta) \geq 0$, in quanto

$$\det\left(D^2\tilde{T}u\right) \leq f(x,\sigma/\eta) = \det\left(D^2\tilde{T}(\sigma/\eta)\right)$$

in Ω e le due funzioni si annullano sulla frontiera.

Supponiamo che invece valga (β). Risulta

$$\begin{aligned} \sigma u_1(\bar{y}) = u(\bar{y}) &= \tau\tilde{T}u(\bar{y}) + (1-\tau)\tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{y}) \\ &< \tau\sigma u_1(\bar{y}) + (1-\tau)\tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{y}), \end{aligned} \tag{13}$$

se σ è sufficientmente grande. Infatti, poichè $|u(x)| \geq \sigma|u_1(x)|$ in Ω_1, si ha $\|u\| \geq \sigma$. Quindi (essendo u una funzione convessa), se $x \in \bar{\Omega}_1$,

$$|u(x)| \geq \|u\|\,|k(x)| \geq \sigma|\eta|,$$

cosí che, se σ è sufficientmente grande, $f(x,u(x)) > \lambda_1|u(x)|^n$ per ogni $x \in \bar{\Omega}_1$. Risulta allora:

$$\det\left(D^2\tilde{T}u\right) - \det\left(D^2\sigma u_1\right) > \lambda_1\left(|u|^n - |\sigma u_1|^n\right) \geq 0$$

in Ω_1; e poichè $\tilde{T}u < \sigma u_1$ su $\partial\Omega_1$ si ha $\tilde{T}u < \sigma u_1$ su $\bar{\Omega}_1$. Abbiamo cosí verificato la (13), da cui segue che

$$\sigma(1-\tau)u_1(\bar{y}) < (1-\tau)\tilde{T}(\sigma/\eta)(\bar{y}).$$

D' altra parte, $\sigma/|\eta| > \sigma|\eta|$ (dato che $|\eta| < 1$) e quindi $f(x,\sigma/\eta) > \lambda_1|\sigma/\eta|^n$ (per la nostra scelta di σ); quindi,ancora per il principio del confronto, $\tilde{T}(\sigma/\eta) < \sigma u_1$ in $\bar{\Omega}_1$. In questo modo perveniamo ad una contraddizione, e quindi

$$i(\tilde{T},U_2,X) = i(G(1,\cdot),U_2,X) = i(G(0,\cdot),U_2,X) = 1$$

dato che $\tilde{T}(\sigma/\eta) \in U_2$.

Osserviamo che, scegliendo $\tau = 1$, abbiamo provato in particolare che $\tilde{T}$ non ha punti fissi su ∂U, ∂U_1, ∂U_2, e che pertanto gli indici sono ben definiti.

Sostituendo in (12) gli indici che abbiamo appena calcolato, otteniamo un' evidente contraddizione e quindi abbiamo provato l' esistenza di un punto fisso $u = \tilde{T}u$ non banale in quanto u non appartiene a U_1. Per provare l' esistenza di un punto fisso per T, basta soltanto verificare che $\|u\| \leq \sigma/|\eta|$, cosí che $\tilde{f}(x,u) = f(x,u)$ su $\bar{\Omega}$. Sicuramente esiste almeno un punto $\bar{x} \in \bar{\Omega}_1$ tale che $u(\bar{x}) \geq \sigma u_1(\bar{x})$, poichè $u \in U \setminus U_2$. Osserviamo che $\sigma u_1(\bar{x}) \geq -\sigma$ e $u(\bar{x}) \leq \|u\|\, k(\bar{x}) \leq \|u\|\, \eta < 0$. Quindi

$$\|u\| \leq u(\bar{x})/\eta \leq u_1(\bar{x})\sigma/\eta \leq \sigma/|\eta|.$$

Esiste quindi un punto fisso non banale u per T. Inoltre, $u < 0$ in Ω, essendo u una funzione convessa e quindi u è una soluzione generalizzata del problema di Dirichlet (1). Ora, per la condizione (2), il secondo membro $f(\cdot, u)$ è strettamente positivo in Ω ed è Lipschitziano in $\bar{\Omega}$. Poichè le soluzioni generalizzate dell' operatore di Monge-Ampère con secondo membro continuo sono soluzioni di viscosità ([C1]), possiamo applicare il risultato di regolarità interna di Caffarelli [C1] per secondi membri Hölderiani. Pertanto, per il Teorema 2 di [C1],si ha che $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$. Inoltre, se f è regolare, allora anche u è regolare in Ω, per i classici risultati di regolarità per equazioni ellittiche.

Dimostrazione del Teorema 2. Supponiamo per assurdo che esista $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ soluzione convessa non banale del Problema (1). Procedendo come all' inizio della prova del Teorema 1, si può dimostrare che u è lipshitziana in $\bar{\Omega}$ e che esistono due costanti $c, C > 0$ tali che

$$c \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right\| \leq C \text{ su } \partial\Omega.$$

Se indichiamo con u_0 la soluzione del Problema (4) per $\lambda = \lambda_0$, tale che $\|u_0\| = 1$, allora per la compattezza di $\bar{\Omega}$, esiste $\sigma > 0$ tale che $\sigma u_0 < u < 0$ in Ω. Poniamo

$$\sigma_0 = \inf \sigma > 0; \sigma u_0 < u < 0.$$

Ovviamente $\sigma_0 > 0$. A causa di (8.a) e della monotonicità di $f(x, \cdot)$ si ha:

$$f(x, u(x)) \leq f(x, \sigma_0 u_0(x)) \leq \mu |\sigma_0 u_0(x)|^n < \lambda_0 \left| \frac{\sigma_0}{1+\varepsilon} u_0(x) \right|^n$$

per ε sufficientemente piccolo. Quindi

$$\det\left(D^2 u\right) = f(x, u) < \lambda_0 \left| \frac{\sigma_0}{1+\varepsilon} u_0(x) \right|^n = MA \frac{\sigma_0}{1+\varepsilon} u_0(x) \text{ in } \Omega$$

$$u = \frac{\sigma_0}{1+\varepsilon} u_0(x) = 0 \text{ su } \partial\Omega.$$

Per il principio del confronto risulta allora

$$\frac{\sigma_0}{1+\varepsilon} u_0(x) < u \text{ in } \Omega$$

e questo è in contraddizione con la scelta di σ_0. Il caso (8.b) si dimostra nello stesso modo, se definiamo

$$\rho_0 = \sup \rho > 0; u < \rho u_0 < 0.$$

Dimostrazione del Teorema 5. Sostituendo la funzione incognita $w(x) = a^{1/(p-n)}u(x)$, il problema considerato nel Teorema 5 è equivalente a

$$\det\left(D^2u\right) = \mu(-u)^q + (-u)^p \qquad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

dove $\mu = ab$. Quando μ è piccolo, ovvero quando a o b sono sufficientmente piccoli, possiamo trovare una soluzione non banale del precedente problema. Siano Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti convessi di $\mathbf{R}^n$ tali che $\Omega_1 \subset\subset \Omega \subset\subset \Omega_2$. Allora si può verificare facilmente che, per il Teorema 6 e qualche elementare argomento di omogeneità, esiste u_2 soluzione convessa del problema

$$\det\left(D^2u_2\right) = \mu_2(-u_2)^q + (-u_2)^p = f_2(u_2) \qquad \text{in } \Omega_2, \quad u_2 = 0 \text{ su } \partial\Omega_2,$$

per una opportuna costante $\mu_2 > 0$. Inoltre, per il Teorema 1, esiste u_1 soluzione convessa del problema

$$\det\left(D^2u_1\right) = (-u_1)^p = f_1(u_1) \qquad \text{in } \Omega_1, \quad u_1 = 0 \text{ su } \partial\Omega_1.$$

Senza perdere in generalità, possiamo supporre che $u_2 < u_1$ in $\bar{\Omega}_1$. Altrimenti (supponendo che l' origine appartenga a Ω), indichiamo con w la nuova funzione

$$w(x) = c^{2n/(p-n)}u_2(cx),$$

dove c è una (piccola) costante positiva. La funzione w è una soluzione convessa del problema

$$\det\left(D^2w\right) = \mu_2 c^{2n(q-p)/(n-p)}(-w)^q + (-w)^p \qquad \text{in } \Omega_c, \quad w = 0 \text{ su } \partial\Omega_c,$$

dove $\Omega_c = \{x; cx \in \Omega_2\}$. D' altra parte

$$\max_{\bar{\Omega}_1} w \leq c^{2n/(p-n)} \max_{\bar{\Omega}_1} u_2,$$

e quindi possiamo scegliere c in modo che $w < u_1$ in $\bar{\Omega}_1$.

Procedendo come nella Dimostrazione del Teorema 1, poniamo

$$X = \{u \in P; u \leq u_1 \text{ in } \bar{\Omega}_1, u \geq u_2 \text{ in } \bar{\Omega}\},$$
$$U = \{u \in P; u < u_1 \text{ in } \bar{\Omega}_1, u > u_2 \text{ in } \bar{\Omega}\}.$$

se $\mu \in (0, \mu_2)$ indichiamo con Tv la soluzione u del problema

$$\det\left(D^2u\right) = \mu(-v)^q + (-v)^p = f(v) \qquad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega. \tag{14}$$

Ora (come nella Dimostrazione del Teorema 1), per il principio del confronto, T non ha punti fissi su ∂U. Inoltre, X è un sottoinsieme chiuso convesso e non vuoto di E ed U è un sottoinsieme (relativamente) aperto di X, cosí che l' indice di punto fisso $i(T, U, X)$ è ben definito. Sia ψ un fissato elemento di U, possiamo scegliere per esempio la soluzione di (14) con $\mu = 0$ (ricordiamo che la soluzione è unica perchè $p < n$, per [Ku], Capitolo2).

Consideriamo ora l' omotopia

$$G(\tau, u) = \tau T u + (1 - \tau)\psi.$$

Sia v un elemento di X; poichè $f_1(u_1) \leq f(v)$ in Ω_1 e $f_2(u_2) \geq f(v)$ in Ω, per il principio del confronto, ragionando come nella Dimostrazione del Teorema 1, è possible mostrare che $G(\tau, \cdot)$ non ha punti fissi su ∂U. Così, per l' invarianza omotopica dell' indice, $i(T, U, X) = 1$ e quindi il problema (14) ha almeno una soluzione u. Inoltre, la regolarità di u si ottiene esattamente come nella Dimostrazione del Teorema 1.

Di qui, la Dimostrazione del Teorema 5 si conclude, attraverso elementari argomenti di omogenietà, dal risultato che abbiamo appena provato per il problema (14).

Dimostrazione del Teorema 6. Indichiamo con E, P e T gli stessi oggetti dell' inizio della Dimostrazione del Teorema 1. Come in [Ku], Teorema 5 possiamo applicare il Teorema di Rothe ([Kr], p. 244, o [Ku], Teorema 5) all' operatore T. A tal fine, osserviamo che T è un operatore compatto (come abbiamo visto precedentemente) e che T manda P in P, per il principio del confronto. Inoltre, si può dimostrare che, se r_0 è un numero positivo fissato, allora

$$\inf_{v \in P, \|v\| = r_0} \|Tv\| > 0.$$

Chiamiamo $k = k(x)$ la funzione continua e convessa su $\bar{\Omega}$ tale che

(i) $k \equiv 0$ su $\partial\Omega$,
(ii) $k \geq u$ per ogni $u \in P$, $\|u\| = 1$,
(iii) se h soddisfa (i) e (ii), allora $h \geq k$.

Per il principio del confronto, risulta:

$$T(r_0 k) \geq Tv \quad \text{in } \bar{\Omega},$$

poichè

$$r_0 k \geq v \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad \text{e } Tv \equiv Tk \equiv 0 \quad \text{in } \partial\Omega.$$

Allora

$$\|Tv\| \geq \|T(r_0 k)\| > 0$$

in Ω per ogni $v \in P$, $\|v\| = r_0$. Quindi, per il Teorema di Rothe, esistono $\mu_1 > 0$ e $u_0 \in P$, con $\|u_0\| = r_0$ tali che $Tu_0 = \mu_1 u_0$. Allora

$$\det\left(D^2 u_0\right) = \mu_1^{-n} \det\left(D^2 \mu_1 u_0\right) = \mu_1^{-n} \det\left(D^2 T u_0\right) = \mu_1^{-n} f(x, u_0) = \mu f(x, u_0),$$

e risulta provata l' esistenza di una soluzione debole del problema (9). Da qui, la regolarità di u_0 segue esattamente come nella Dimostrazione del Teorema 1.

BIBLIOGRAFIA

[Al] A.D.Alexandrov, *Dirichlet's Problem for the Equation* $\det(z_{ij}) = \Phi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$, Vestnik Leningrad Univ. **13** (1958), 5–24.

[Am] H.Amann, *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, S.I.A.M. Review **18** (1976), 620–709.

[AR] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[Ba1] I. Bakelman, *Geometric Methods of Solving Elliptic Equations*, (in Russian), Nauka, Moskow, 1965.

[Ba2] I. Bakelman, *Generalized Elliptic Solutions of the Dirichlet Problem for n-dimensional Monge--Ampère Equations*, Proc. Sym. in Pure Math. **45** (1986), 73–102.

[C1] L. A. Caffarelli, *A Localization Property of Viscosity Solutions to the Monge-Ampère Equations and Their Strict Convexity*, Ann. of Math. **131** (1990), 129-134.

[C2] L. A. Caffarelli, *Interior* $W^{2,p}$ *Estimates for Solutions of the Monge-Ampère Equation*, Ann. of Math. **131** (1990), 135-150.

[D] Ph. Delanoë, *Radially Symmetric Boundary Value Problems for Real and Complex Elliptic Monge- -Ampère Equations*, J. Diff. Equations **58** (1985), 318-344.

[FKuP] B. Franchi, N. Kutev, S. Polidoro, *Nontrivial Solutions for Monge-Ampère Type Operators in Convex Domains*, (preprint).

[GT] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[HZ] J. Hong, C. Zuily, L^p *and Hölder Estimates for a Class of Degenerate Elliptic Boundary Value Problems. Application to the Monge-Ampère Equation.*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 997-1031.

[Kr] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, (in Russian), G.I.T.T.L., Moscow, 1956.

[Ku] N. Kutev, *Nontrivial Solutions for the Equations of Monge-Ampère Type*, J. Math. Anal. Appl. **132** (1988), 424–433.

[KuR] N. Kutev, I.P. Ramadanov, *An Eigenvalue Problem for the Complex Monge-Ampère Operator in Pseudoconvex Domains*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse non linéaire **7** (1990), 493–503.

[Lio] P. -L. Lions, *Two Remarks on the Monge-Ampère Equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **142** (1985), 263–275.

[Lij] Lu Lijang, *Comparison Principle for Weak Solutions of Monge-Ampère Equations*, Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), 1217–1236.

[P] S. I. Pohožaev, *on the Eigenfunction of the Equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, English Translation, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[T] K. Tso, *Remarks on Critical Exponents for Hessian Operators*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse non linéaire **7** (1990), 113–122.

[U1] J. I. Urbas, *The Equation of Prescribed Gauss Curvature without Boundary Conditions*, J. Diff. Geometry **20** (1984), 311–327.

[U2] J. I. Urbas, *Regularity of Generalized Solutions of Monge-Ampère Equations*, Math. Z. **197** (1988), 365–393.